INSTITUTO SUPERIOR DE COMERCIO
ENRIQUE MALDONADO SEPÚLVEDA
TALCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

GUÍA DE APRENDIZAJE

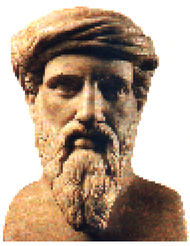
NÚMEROS IRRACIONALES Y REALES

NOMBRE:	FECHA:	CURSO:
CONTENIDO: Conjunto de números irracionales y reales.	**OBJETIVOS:** • Caracterizar el conjunto de los números irracionales. • Aproximar números irracionales. • Reconocer números irracionales notables como π, φ, e . • Ubicar geométricamente números irracionales en la recta numérica. • Comparar números irracionales. • Definir el conjunto de los números reales. • Ubicar números reales en la recta numérica. • Determinar intervalos para aproximar números irracionales que involucren raíces. **Instrucciones:** Escribe el contenido de esta guía de aprendizaje en tu cuaderno y resuelve los ejercicios de forma ordenada.	

En el siglo V a.c., los griegos pitagóricos descubrieron con gran sorpresa que, además de los Números Naturales y de los Números Fraccionarios, existía otro tipo de número: el Número Irracional.

Hasta entonces pensaban que todo el universo se regía por los Números Naturales y las Fracciones, pero se dieron cuenta que hay pares de segmentos, como la diagonal y el lado de un pentágono regular o como la diagonal y el lado de un cuadrado, cuyo cuociente de longitudes no es una fracción.

Les pareció que el caos asomaba a su mundo y llamaron a tal relación ahogos o irracional.



ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN:

Usando calculadora o celular, completa la siguiente tabla. Analiza los resultados y clasifícalos según su desarrollo decimal (finitos, infinito periódico y semiperiódico)

1.- $\sqrt{1,21}$ = 1,1	decimal finito	2.- $\sqrt{7}$	
3.- $\sqrt{1}$		4.- $\sqrt{99}$	
5.- $\sqrt{100}$		6.- $\sqrt{11}$	
7.- $\sqrt{4}$		8.- $\sqrt{13}$	
9.- $\sqrt{4,9}$		10.- $\sqrt{0,64}$	
11.- $\sqrt{1,44}$		12.- $\sqrt{6,4}$	

Responde:

1) ¿Cuáles representan desarrollos decimales finitos?

____

2) ¿Cuáles representan desarrollos decimales infinitos periódicos o semiperiódicos?

____

3) ¿Cuáles no pertenecen a ninguna de las clasificaciones anteriores?

____

4) ¿Qué características tienen los números que no son racionales?

____

Observando los desarrollos decimales anteriores podemos darnos cuenta que existen números que no pertenecen a ninguna de las clasificaciones anteriores, es decir, su desarrollo decimal es infinito sin período, por tanto no son números racionales**,** como los números decimales infinitos no periódicos no se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$ surgió la necesidad de crear los **Números Irracionales.**

Los números irracionales son aquellos números que no se pueden escribir como fracción y que tienen infinitas cifras decimales que no presentan período. El conjunto de los números irracionales se representa por I.

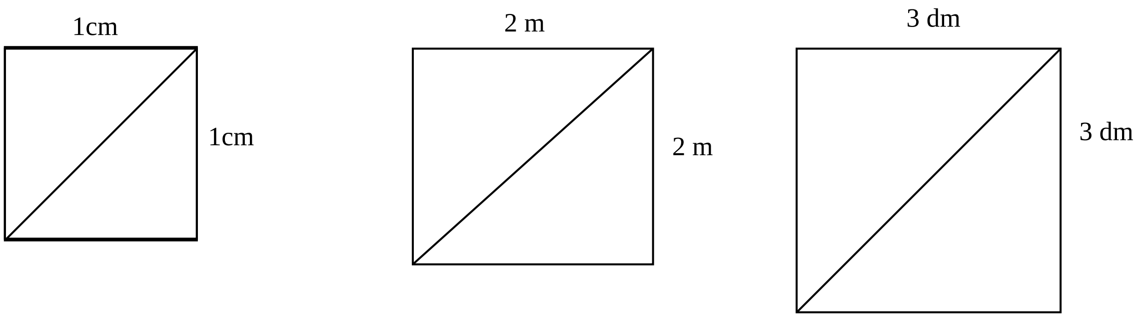
Según esto, responde y justifica:

¿Un número racional puede ser un número irracional? ___________________________

¿Un número irracional puede ser un número racional? ___________________________

EJEMPLOS DE NÚMEROS IRRACIONALES:

1) Calcula la medida de la diagonal en los siguientes cuadrados:



$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ representa la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

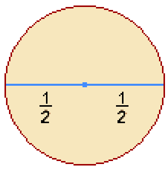
$\sqrt{8} = 2{,}828427124\ldots$ representa la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 2.

$\sqrt{18} = 4{,}24264068\ldots$ representa la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3.

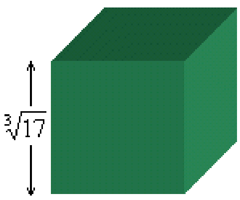
Con esto, ¿podemos decir que toda raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto es un número irracional? ¿Por qué? ___________________________________

____

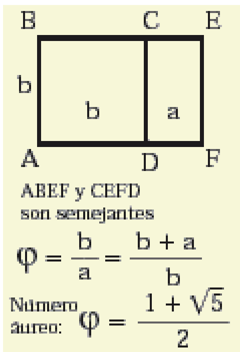
2) $\pi = 3{,}1415926535897\ldots$: Número que representa la longitud de una circunferencia de diámetro 1, y el área de una circunferencia de radio 1.



3) $\sqrt[3]{17} = 2{,}5712815906582\ldots$: Representa la longitud de la arista de un cubo de volumen 17.



4) $\phi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 1{,}6180339887498\ldots$: Número que según los griegos era la proporción perfecta desde un punto de vista estético; por ejemplo, el rectángulo más hermoso para ellos era aquel cuyos lados estaban en dicha proporción. Por tal motivo, a

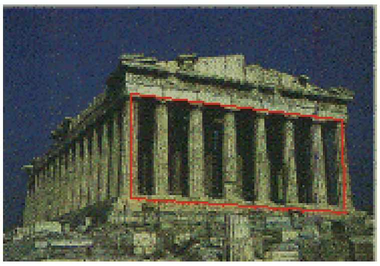


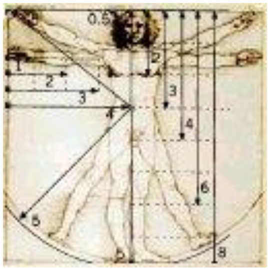
este número se le conoce como la **razón áurea** o **número de oro**.

5) $e = 2{,}7182818284\ldots$: Cuyo nombre se debe a su descubridor Leonhard Euler (matemático suizo del siglo XVIII) que aparece en diversas aplicaciones como economía, crecimiento de poblaciones, etc.

Una forma de encontrar el valor de e es realizar la siguiente suma. Analízala e intenta continuar y calcular aproximaciones con ayuda de la calculadora:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$





APROXIMACIÓN DE UN NÚMERO IRRACIONAL

Existen diversas formas de aproximar números irracionales que son de la forma $\sqrt{a}, a > 0$.

Veamos como ejemplo $\sqrt{2}$:

1) Por aproximación:

$$\begin{aligned} &1 < 2 < 4 \quad /\sqrt{\ } \\ &\Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \\ &\Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \end{aligned}$$

Para calcular una aproximación de $\sqrt{2}$ con un decimal se procede a calcular los cuadrados de todos los números **entre** 1 y 2 con un decimal, hasta encontrar un valor menor y mayor que $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} (1{,}1)^2 &= 1{,}21 \\ (1{,}2)^2 &= 1{,}44 \\ (1{,}3)^2 &= 1{,}69 \\ (1{,}4)^2 &= 1{,}96 \\ (1{,}5)^2 &= 2{,}25 \end{aligned}$$

Estos cálculos nos indican que $\sqrt{2}$ está entre $1{,}4$ y $1{,}5$. Así, podemos afirmar que:

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

El error cometido al aproximar $\sqrt{2}$ por 1,4 o por 1,5 es menor que una décima.

Continuamos,

$$1{,}41^2 = 1{,}9881$$
$$1{,}42^2 = 2{,}0164$$

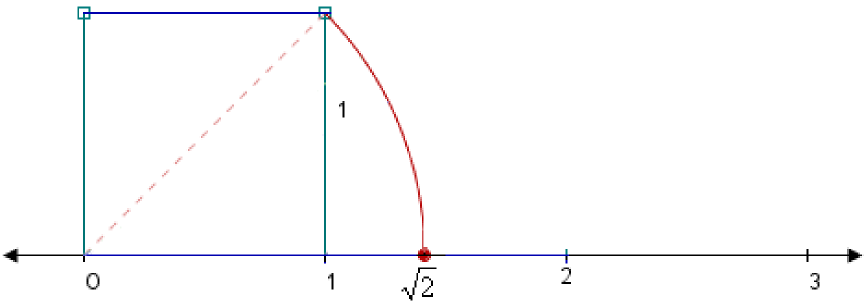
De lo que podemos deducir que:

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

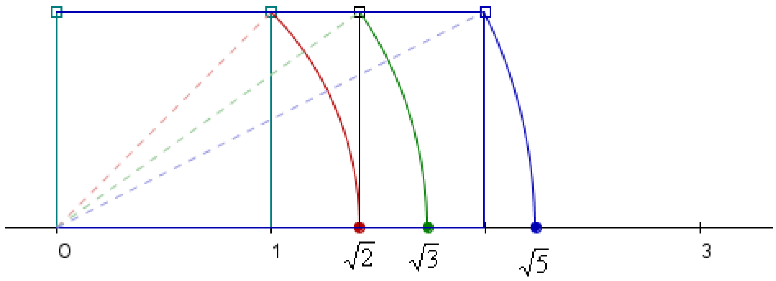
Podemos observar que este proceso es infinito, lo cual nos dice que podemos obtener una aproximación de $\sqrt{2}$ con la cantidad de decimales que queramos o con el **grado de exactitud que uno quiera.**

2) Ubicándolo en la recta numérica:

En este caso con ayuda de una escuadra y compás, construimos un triángulo rectángulo de lado 1 unidad sobre la recta numérica, cuya diagonal medirá $\sqrt{2}$, por el teorema de Pitágoras. Luego, con el compás de abertura igual a la diagonal marcamos sobre la recta numérica, este punto es $\sqrt{2}$.



Este procedimiento, lo podemos utilizar para ubicar cualquier número irracional en la recta numérica. Observa los ejemplos de la figura:



EJERCICIOS:

Desarrolla cada ejercicio en forma ordenada, destacando el resultado

1) Determina si los siguientes números pertenecen a Q (nº racionales) o a I (nº irracionales). Marca con una cruz donde según la clasificación que corresponda.

Número	Racional	Irracional
3,14		
3,14444 …		
3,14141414 …		
0,25		
$-\sqrt{5}$		
$\sqrt{4}$		
2π		
0,11121314…		
0,11121313…….		
3,010010001……		
$-3\sqrt{25}$		

2) ¿Cuál de los siguientes números irracionales entre 0 y 1? Justifica.

$a)\sqrt{2}-\sqrt{3}$ $\quad b)\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ $\quad c)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad d)\,\pi$

¿Qué procedimiento utilizaste? ____

3) ¿Cuál o cuáles de los siguientes números irracionales está comprendido entre 3 y 4?

a) $2\sqrt{3}$ b) $\dfrac{\pi}{3}$ c) $\sqrt{5}+1$ d) $3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{10}$ f) 3,5 g) 3,9999……

¿Qué procedimiento utilizaste? ____

4) Determinar por aproximación el valor de los siguientes números reales (con dos decimales):

$a)\sqrt{10}$, $b)\sqrt{5}0$, $c)\ \sqrt{58}$, $d)\ \sqrt{72}$, $e)\ \sqrt{73}$

5) Ubica en tu cuaderno los siguientes números irracionales en la recta numérica:

$\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$, $-2\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$, $-3\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$

6) ¿Cuál(es) de los siguientes números es o son números irracionales? Justifica.

I) $\sqrt{36}$ ____

II) $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ ____

III) $1+\sqrt{2}$ ____

¿Cómo puedes sumar o restar números irracionales?

____

7) Utiliza una estrategia para ordenar en forma creciente los siguientes números irracionales:

$\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $2\sqrt{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$

¿Qué estrategia has usado? ______________________________________

¿Hay otras opciones para comparar? Compara con tus compañeros y comparte tus estrategias:

____

____

ACTIVIDAD DE INVESITGACIÓN:

Investiga y redacta una breve historia del número π, e y ϕ.

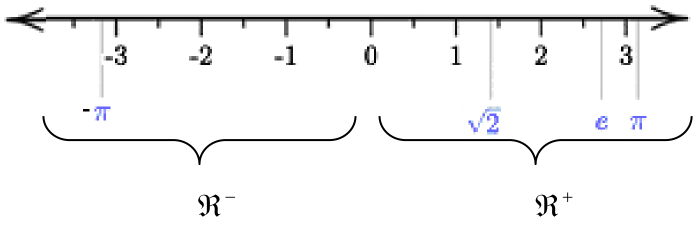
LOS NÚMEROS REALES:

Se llaman números reales todos aquellos números que pueden expresarse en forma decimal finito o infinito, es decir, el conjunto de los números reales $\Re$, está formado por la unión del conjunto de los números racionales e irracionales.

Simbólicamente,

$$\Re = Q \cup I$$

Cada número real corresponde exactamente a un punto sobre la recta numérica, llamada **recta real,** los números reales que se representan a la derecha del origen se llaman **números reales positivos** y los números reales que se representan a la izquierda del origen se llaman **números reales negativos**. El cero es el origen de la recta real.



A continuación te presentamos en forma esquemática, una síntesis de la estructura de los números estudiados hasta el momento:

- **Números Reales** $\Re$
  - **Números Racionales** Q
    - **Números Enteros**
      - **Números Enteros Positivos o naturales**
      - **Cero**
      - **Números Enteros negativos**
    - **Números Racionales no enteros**
      Ej.: $0{,}31$; $\frac{3}{4}$; $7{,}\overline{31}$; $-\frac{5}{9}$
  - **Números Irracionales** I
    Ej.: $\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$; π; ....

EJERCICIO:

Determina a cuál o cuales de los conjuntos numéricos pertenecen los siguientes números:

Número	IN	Z	Q	II	IR
-5					
2π					
$-\frac{1}{2}$					
$\sqrt{25}$					
$3\sqrt{2}$					
0,123333….					
0					
$1+\sqrt{3}$					
12					
$\sqrt{-4}$					